

走行時の地面反力を解析するための特殊な平均の力モデルと擬速度モデルの提案、およびそれらを用いた走りのみからドーピングを検知する方法の提案

Special mean force model and pseudo velocity model for analyzing ground reaction force during running, and a method of doping detection just by looking at the run derived from these models

宗里 岳

MUNESATO Gaku

(無所属)

info @ gaku-munesato.com

原著論文

2025年6月24日 公開

We may be able to detect doping just by looking at the run. I have noticed that doped humans or horses putting on a spurt have smaller changes in ground reaction force (GRF) of each limb. As time progresses, humans or horses putting on a spurt have increased GRF near landing and decreased GRF near detachment. Then, doped humans or horses have smaller these GRF changes than non-doped humans or horses. To explain this phenomenon from theoretical perspective, I constructed special mean force model and pseudo velocity model. From special mean force model, the percentage of stance phase under various conditions can be derived. From pseudo velocity model, changes in GRF under various conditions can be derived.

1 はじめに

私は、陸上の短距離走と競馬の動画を見ているうちに、ドーピングをした人や馬の走りにはある特徴があるのではないかと思うようになった。その特徴とは、「疲労しにくくなる効果のあるドーピングをした人や馬はそうでない個体に比べ、全力近くを出すスパート中の各肢の早期負重度が増加しにくくなる」というものである。早期負重度とは、次のように定義した値であり、着地に近い時間帯の地面反力が大きいと早期負重度は大きくなり、離地に近い時間帯の地面反力が大きいと早期負重度は小さくなる。ある1つの肢 i に加わる地面反力 $\mathbf{F}_i(t)$ [N]、着地したときの時刻 t_{oni} [s]、立脚期の時間 T_{oni} [s]を用いると、肢 i のある立脚期での早期負重度 s_i は次のようになる。

$$s_i = \frac{\int_{t_{oni}}^{t_{oni}+T_{oni}} |\mathbf{F}_i(t)| \frac{T_{oni} - (t - t_{oni})}{T_{oni}} dt}{\int_{t_{oni}}^{t_{oni}+T_{oni}} |\mathbf{F}_i(t)| dt}$$

実際に私が走りを観察し、その特徴があると感じたドーピングをした人や馬の例として、1988年ソウルオリンピック男子100メートル決勝でのベ

ン・ジョンソン、2006年第85回凱旋門賞でのディープインパクト、2020年第1回サウジカップでのマキシマムセキュリティが挙げられる。

このドーピングをした人や馬の走りの特徴を利用して、走りからでもドーピングを検知できれば、ドーピング検査の精度は高まると思われる。ただ、走りからドーピングを検知する方法を確立し、実装するには、「疲労しにくくなる効果のあるドーピングをした人や馬はそうでない個体に比べ、全力近くを出すスパート中の各肢の早期負重度が増加しにくくなる」、このことを確かにしなければいけない。それには、実験や分析による定量的なデータからの補強と、その現象を説明できるモデルによる理論側からの補強が必要である。そして今回、理論側からの補強として構築したモデルが、特殊な平均の力モデルと擬速度モデルである。

特殊な平均の力モデルと擬速度モデルは、主に動画で人や馬の走りを観察し、そこから得られた情報を基に構築した。動画での観察を実験の代わりとしており、モデルから導けることが観察結果と矛盾しないようにした。当初、このモデルを構築する目的は、走りからドーピングを検知する方法を確立するためのみであった。しかし、実際に構築したモデルは、様々な条件下での地面反力の特徴（立脚期の割合、早期負重度、後肢負重率など）が導ける、より一般的なモデルとなった。

本論文では、2章で事前準備を行ったあと、3章で特殊な平均の力モデルを、4章で擬速度モデルを解説。5章で特殊な平均の力モデルと擬速度モデルから導いた予想を紹介している。5章2節にドーピングの検知方法（ドーピングをした人や馬の走りの特徴についての予想）を載せている。

2 事前準備

2.1 理想の1完歩の導入

2.1.1 1完歩の定義の拡張

人でも馬でも、走行時に各肢は回転する。1完歩とは、走行時に各肢が1回転することと置き換えられる。1完歩の時間は、各肢が1回転する時

間であり、1完歩の間に進んだ距離は、各肢が1回転する間に進んだ距離である。また、1完歩の時間、1完歩の間に進んだ距離と表現したように、1完歩自体は時間や距離のことではないとする。

1完歩中に肢は1回転するが、開始地点は任意で決めて良い。肢がどの位相にあるときでも、1回転してそこに戻ってくるまでのことを1完歩とする。

2.1.2 理想の1完歩

走行中の、地面から見た速度や加速度、地面反力などは、1完歩の中で変化する。レース全体を通しての状況の変化に応じた速度や加速度、地面反力の変化など、比較的マクロな変化を扱う場合は、1完歩の中での変化はノイズとなる。そのため、その時点を中心とした1完歩を用い、その平均や合計を取った値など、その時点を中心とした1完歩から導き出した値を扱いたいと考える。

しかし、現実の1完歩では、1完歩の中でも状況は常に変化している。具体的に言い換えると、1完歩の中のある時点 t のときの地面、風による力、 t を中心とした1完歩の地面から見た平均速度や平均加速度といった状況 $\mathbf{X}(t)$ が、 t によって変化している、ということである。この1完歩から導き出した値は、理論上で本当に扱いたい値である、その時点の状況に固定したときの1完歩から導き出した値にはならない。

対して、1完歩中のあらゆる時点 t でも状況 $\mathbf{X}(t)$ が変わらない1完歩のことを、「状況が変化しない理想の1完歩」もしくは縮めて「理想の1完歩」と呼ぶことにする。状況が変化しない理想の1完歩は実際には存在しないが、これを導入することで、理論上で本当に扱いたい値である、その時点の状況に固定したときの1完歩から導き出した値が考えられるようになる。理想の1完歩では、地面から見た1完歩の平均加速度が0以外となる場合でも、1完歩の最初の時点と最後の時点で地面から見た速度は変わらず、また1完歩中のどの時点でもその時点を中心とした1完歩の地面から見た平均速度は変わらない、ということが起こる。

本論文では、理想の1完歩に関係する値には、多くの場合に添字で u をつける。例えば、地面から見た身体重心の理想の1完歩での平均速度は v_u と表す。

2.2 座標軸の設定

身体重心（身につけているものを含む）を原点とする。地面を平面とみなしたとき、その平面に垂直上向きになるように z 軸をとる。地面から見た理想の1完歩での平均速度 v_u と z 軸に沿う単位ベクトル k を用いて表される、 $v_u - (v_u \cdot k)k$ の向きを進行方向とする。そして、進行方向に x 軸をとる。 x 軸は z 軸に直行する。右手直行座標系になるように y 軸を取る。(Fig. 1)

x 軸、 y 軸、 z 軸それぞれに沿う単位ベクトルを i 、 j 、 k とする。

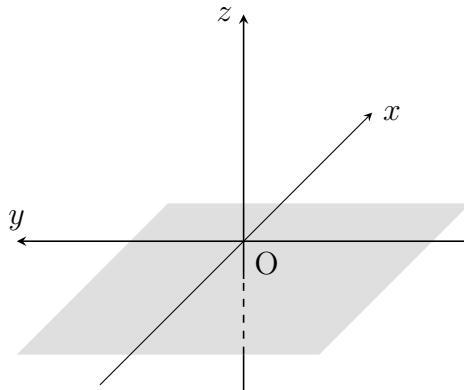


Fig. 1

2.3 滑走時垂直抗力の導入

2.3.1 滑走時垂直抗力

走っているときの地面、姿勢、風、他者から加わる力、地面から見た速度、原点の真下の地面の点（原点の移動に合わせて移動する）から見

た原点の理想の 1 完歩での平均加速度、といった状況はそのままに、地面に接地し滑ったときの仮想の垂直抗力を滑走時垂直抗力 N [N] とする。

$$N = Nk \text{ [N]}$$

N (N) には、重力や風、他者との接触による z 軸方向の力、地面の x 軸方向の曲率がある場合に生じる z 軸方向の慣性力（遠心力）、低い体勢から高い体勢になるときや高い体勢から低い体勢になるときなどに生じる z 軸方向の慣性力が影響する。

理想の 1 完歩中では、 N (N) は常に一定になる。

2.3.2 地面の平滑化

滑走時垂直抗力は、実際の地面ではなく、平滑化された地面で考える。平滑化された地面は、肢が着地した点を通る平面または滑らかな曲面となるが、具体的な平滑化の方法は確立できていない。基本的に、陸上のトラックを走るときの平滑化された地面は、常に平面になると見て良い。

3 特殊な平均の力モデル

特殊な平均の力を考えると、様々な条件下での立脚期の割合（1 完歩の時間に対する全肢の立脚期の時間の平均）が導ける。

3.1 特殊な平均の力

特殊な平均の力は、理想の 1 完歩上で考えられるものである。地面に平行な x 軸と y 軸方向は、理想の 1 完歩の時間全体での力積を、理想の 1 完歩の時間（理想の 1 完歩での肢が 1 周する時間） T_u [s] で割って導き出された平均の力となる。地面に垂直な z 軸方向は、理想の 1 完歩の時間全体での力積を、理想の 1 完歩での全肢の立脚期の時間の平均 T_{uon}^- [s] で

割って導き出された平均の力となる。この2種類の平均の力の導き方が、立脚期の割合を求めるために重要となる。

特殊な平均の力には、能動的な力 \mathbf{F}_p [N] と受動的な力 \mathbf{F}_r [N] の2つがある。特殊な平均の力の始点を原点まで移動して図示したものを持特殊的な平均の力の図と呼ぶ (Fig. 2)。能動的な力は、体の動きと地面の特性（地面と足裏の接地部分の作用の仕方）で決まる。厳密に正しい言い方ではないかもしれないが、地面を蹴って生む推進力のことである。受動的な力には、地面から受ける抗力、風による x 軸と y 軸方向の力（空気抵抗を含む）、地面が水平でない場合の重力による x 軸と y 軸方向の力などが含まれる。

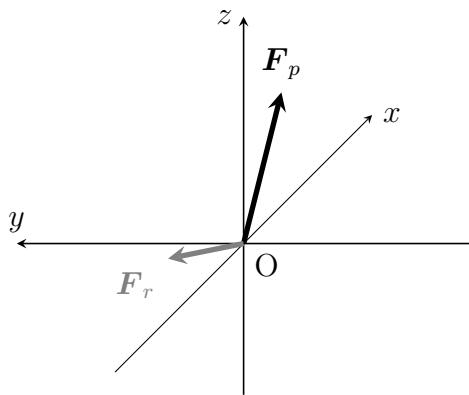


Fig. 2

3.2 能動的な力

能動的な力 \mathbf{F}_p [N] は次のように表せる。

$$\mathbf{F}_p = F_{px}\mathbf{i} + F_{py}\mathbf{j} + F_{pz}\mathbf{k} \text{ [N]}$$

3.2.1 w 軸の設定

地面と平行な $F_{px}\mathbf{i} + F_{py}\mathbf{j}$ の向きに w 軸をとる。 w 軸が x 軸の正の向きとのなす角を θ とする (Fig. 3)。

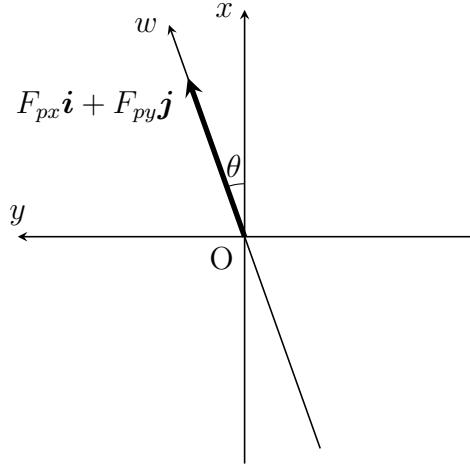


Fig. 3

\$w\$ 軸の単位ベクトルを \$\mathbf{l}\$ とする。\$w\$ 軸を用いると、\$\mathbf{F}_p\$ は次のように表せる。

$$\mathbf{F}_p = F_{pw}\mathbf{l} + F_{pz}\mathbf{k} [\text{N}]$$

3.2.2 能動的な力の法則 1

\$F_{pz}\$ は \$F_{pw}\$ の関数であると予想され、滑走時垂直抗力 \$N\$、走能力数 \$A\$ [] という量を用いて次のように表す。\$A > 0\$ である。

$$F_{pz} = g(F_{pw}, N, A) = NAf\left(\frac{F_{pw}}{NA}\right)$$

\$F_{pz}\$-\$F_{pw}\$ 平面での \$F_{pz} = g(F_{pw}, N, A)\$ のグラフは、\$F_{pz} = f(F_{pw})\$ のグラフを原点を中心に \$F_{pw}\$ 軸方向、\$F_{pz}\$ 軸方向ともに \$NA\$ 倍したものである。また、\$F_{pw}\$ の最大値 \$F_{pw-max}\$ に関して \$F_{pw-max} = NA\$ [N] が成り立つように、関数 \$f\$ および \$A\$ は決定される。(Fig. 4)

関数 \$f\$ は健康な人であればほとんど差はなく、ある 1 つの関数をすべての健康な人の関数 \$f\$ にしても実用的な問題は生じないと考えている。同様に、ある 1 つの関数をすべての健康なサラブレッドの関数 \$f\$ にしても実用的な問題は生じないと考えている。

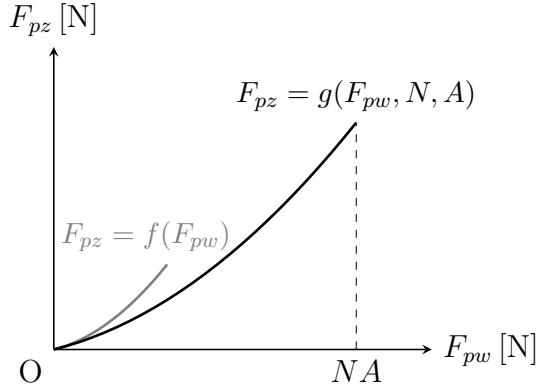


Fig. 4

走能力数 A とは、最大で N の何倍の F_{pw} を出せるかという指標である。 A が大きいほど N に対して大きな F_{pw} を発揮することができ、基本的には A が大きいほど速く走ることができる。 A は元々の骨格や筋力に加え、走る環境やレース中の疲労など、様々な要因で変化する。

3.2.3 能動的な力の法則 2

N と A を定数と見なせば、 $F_{pz} = g(F_{pw})$ となる。

F_{pw} 、 F_{pz} は 0 以上の値になる。

$$0 \leq F_{pw} \leq F_{pw-max} = NA \quad (F_{pw-max} = NA > 0)$$

$$0 \leq F_{pz} \leq F_{pz-max} \quad (F_{pz-max} > 0)$$

また、 $F_{pw} = 0$ のとき、 $F_{pz} = 0$ となる。

$$f(0) = 0$$

$$g(0) = 0$$

$f(F_{pw})$ 、 $g(F_{pw})$ はすべての F_{pw} について連続である。

次を満たす F_{pw} の値は必ず 1 つだけ存在する。

$$\begin{cases} F_{pz} = g(F_{pw}) \\ F_{pz} = bF_{pw} \\ \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \leq b \leq B \\ F_{pw} = 0 \quad (b = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}) \\ F_{pw} \neq 0 \quad (b > \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}) \end{cases}$$

ここで、 b [] は出力数、 B [] は最大出力数と呼ぶことにする。出力数 b が大きいほど、 F_{pw} 、 F_{pz} は大きくなる。 $b = B$ のとき、 F_{pw} 、 F_{pz} はそれぞれ $F_{pw\text{-max}}$ 、 $F_{pz\text{-max}}$ になる。また、 $F_{pw\text{-max}} = NA$ 、 $F_{pz\text{-max}} = g(NA)$ となる。(Fig. 5)

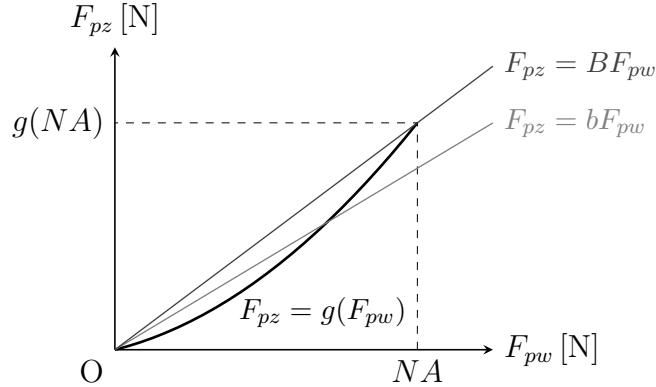


Fig. 5

次を満たす、 b によって一意に定まる w の値を $h(b)$ とする。 $h(b)$ [] は出力率と呼ぶ。 $0 \leq h(b) \leq h(B) = 1$ となる。

$$\begin{cases} z = f(w) \\ z = bw \\ \lim_{i \rightarrow +0} \frac{f(0+i) - f(0)}{i} \leq b \leq B \\ w = 0 \quad (b = \lim_{i \rightarrow +0} \frac{f(0+i) - f(0)}{i}) \\ w \neq 0 \quad (b > \lim_{i \rightarrow +0} \frac{f(0+i) - f(0)}{i}) \end{cases}$$

$h(b)$ を用いると、

$$F_{pw} = NAh(b)$$

$$F_{pw\text{-max}} = NAh(B) = NA$$

$$F_{pz} = g(NAh(b)) = NAf(h(b))$$

$$F_{pz\text{-max}} = g(NAh(B)) = g(NA) = NAf(h(B)) = NAf(1)$$

と表せる。

3.2.4 能動的な力の性質

能動的な力 \mathbf{F}_p は、関数 f が一定の場合、次の性質を有する。

- ある出力数 b での $\frac{F_{pw}}{N}$ 、 $\frac{F_{pz}}{N}$ の大きさは、走能力数 A に比例する。
(ある出力数 b での F_{pw} 、 F_{pz} の大きさは、 NA に比例する。) (Fig. 6)

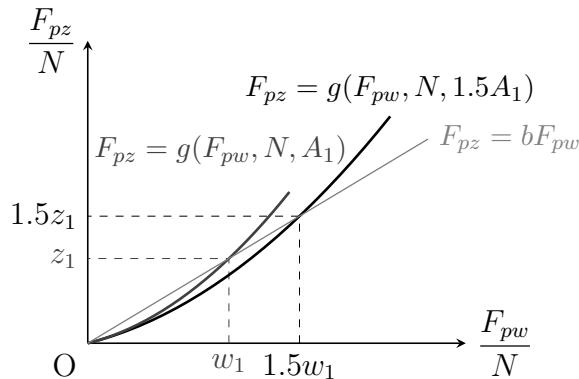


Fig. 6

- $\frac{F_{pw}}{N}$ が同じであれば、走能力数 A が大きいほど出力数 b が小さくなり、 $\frac{F_{pz}}{N}$ が小さくなる。
(F_{pw} が同じであれば、 NA が大きいほど出力数 b が小さくなり、 F_{pz} が小さくなる。) (Fig. 7)

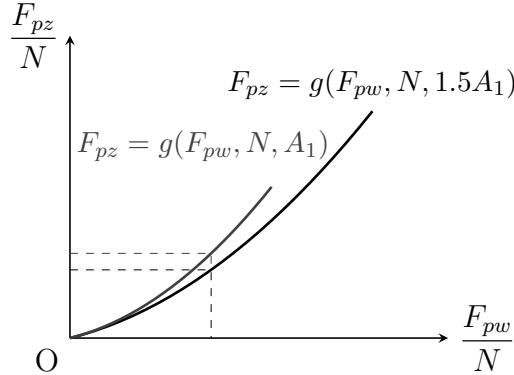


Fig. 7

3.3 受動的な力

受動的な力 \mathbf{F}_r [N] は次のように表せる。

$$\mathbf{F}_r = F_{rx}\mathbf{i} + F_{ry}\mathbf{j} + F_{rz}\mathbf{k} \text{ [N]}$$

$$\mathbf{F}_r = \sum_{i=1} \mathbf{F}_{ri} \text{ [N]}$$

受動的な力は、地面から受けける基本の力 ($i = 1, 2$) とそれ以外の受動的な力 ($i \geq 3$) に分けられる。

3.3.1 地面から受けける基本の力

地面から受けける基本の力 $\mathbf{F}_{r1} + \mathbf{F}_{r2}$ の、 \mathbf{F}_{r1} 、 \mathbf{F}_{r2} はそれぞれ次のようになる。

$$\mathbf{F}_{r1} = F_{r1x}\mathbf{i} + F_{r1z}\mathbf{k} \text{ [N]}$$

$$\mathbf{F}_{r2} = N\mathbf{k} \text{ [N]}$$

\mathbf{F}_{r1} は x 軸方向と z 軸方向の平均の力で構成される。 \mathbf{F}_{r2} は z 軸方向で大きさが N の平均の力である。(Fig. 8)

\mathbf{F}_{r1} は、地面から見た理想の 1 完歩での進行方向の平均速度 v_{ux} 、 N 、地面の特性（地面と足裏の接地部分の作用の仕方）で決まる。 $F_{r1x} \leq 0$ 、

$F_{r1z} \geq 0$ となる (Fig. 8)。 $-F_{r1x}$ と F_{r1z} は、 v_{ux} におおよそ比例して大きくなると予想している。 $v_{ux} = 0$ のときは、 $-F_{r1x} = 0$ 、 $F_{r1z} = 0$ となる。 $-F_{r1x}$ 、 F_{r1z} は N におおよそ比例して大きくなると予想している。 $N = 0$ のときは、 $-F_{r1x} = 0$ 、 $F_{r1z} = 0$ となる。

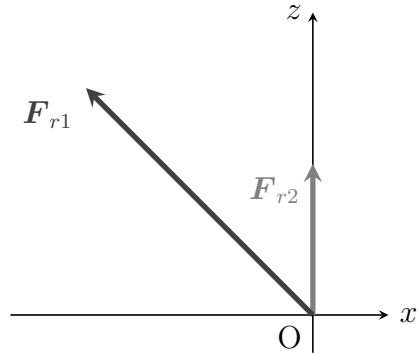


Fig. 8

3.3.2 それ以外の受動的な力

$$\sum_{i=3} \mathbf{F}_{ri} [\text{N}]$$

ここには風による x 軸と y 軸方向の力（空気抵抗を含む）、地面が水平でない場合の重力による x 軸と y 軸方向の力、レース中に他の人や馬に接触したときに加わる x 軸と y 軸方向の力などが含まれる。 z 軸方向の力は 0 になる。

風と重力による z 軸方向の力や他者と接触したときに加わる z 軸方向の力は、 N に反映されている。

3.4 特殊な平均の力と加速度

3.4.1 地面から見た理想の1完歩での平均加速度

地面から見た理想の1完歩での平均加速度 \mathbf{a}_u は次のように表せる。

$$\mathbf{a}_u = a_{ux}\mathbf{i} + a_{uy}\mathbf{j} + a_{uz}\mathbf{k} [\text{m s}^{-2}]$$

身体（身につけているものを含む）の質量を $m [\text{kg}]$ とすると、進行方向 (x 軸方向) の理想の1完歩での平均加速度 a_{ux} 、向心力方向 (y 軸方向) の理想の1完歩での平均加速度 a_{uy} に関して、それぞれ次が成り立つ。

$$a_{ux} = \frac{F_{px} + F_{rx}}{m}$$

$$a_{uy} = \frac{F_{py} + F_{ry}}{m}$$

3.4.2 地面から見た理想の1完歩での能動的な平均加速度

\mathbf{F}_p と \mathbf{F}_{r1} を用い、地面から見た理想の1完歩での能動的な平均加速度 \mathbf{a}_{u1} 、進行方向 (x 軸方向) の理想の1完歩での能動的な平均加速度 a_{u1x} 、向心力方向 (y 軸方向) の理想の1完歩での能動的な平均加速度 a_{u1y} を次のように定義する。

$$\mathbf{a}_{u1} = a_{u1x}\mathbf{i} + a_{u1y}\mathbf{j} [\text{m s}^{-2}]$$

$$a_{u1x} = \frac{F_{px} + F_{r1x}}{m}$$

$$a_{u1y} = \frac{F_{py}}{m}$$

3.5 特殊な平均の力と立脚期の割合

理想の1完歩での肢が1周する時間（1完歩の時間）を $T_u [\text{s}]$ 、理想の1完歩での全肢の立脚期の時間の平均を $T_{uon}^- [\text{s}]$ とすると、次が成り立つ。

$$NT_u = (F_{pz} + F_{r1z} + N)T_{uon}^-$$

$$\frac{T_{uon}^-}{T_u} = \frac{N}{F_{pz} + F_{r1z} + N}$$

$\frac{T_{won}^-}{T_y}$ が理想の 1 完歩での立脚期の割合である。また、 $F_{pz} + F_{r1z} + N$ の部分は、 $\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_r$ の z 成分である。

4 擬速度モデル

擬速度を考えると、様々な条件下での早期負重度、 w 軸方向の地面反力、後肢負重率が導ける。

4.1 早期負重度

ある 1 つの肢 i に加わる地面反力 $\mathbf{F}_i(t)$ [N]、着地したときの時刻 t_{oni} [s]、立脚期の時間 T_{oni} [s] を用いて、肢 i のある立脚期での早期負重度 s_i を次のように定義する。

$$s_i = \frac{\int_{t_{oni}}^{t_{oni}+T_{oni}} |\mathbf{F}_i(t)| \frac{T_{oni} - (t - t_{oni})}{T_{oni}} dt}{\int_{t_{oni}}^{t_{oni}+T_{oni}} |\mathbf{F}_i(t)| dt}$$

$0 \leq s_i \leq 1$ となる。

理想の 1 完歩での肢 i の早期負重度を s_{ui} とする。また、肢の本数を n 本とすると、理想の 1 完歩での各肢の早期負重度は、 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と表せる。

早期負重度に関して、次のように予想している。早期負重度には骨格、筋肉などの体のつくりやシューズが影響し、個体ごとに異なる。また、フォアフット走法、リアフット走法といった着地方法によっても変化する。さらに、同じ個体が同じ着地方法をしても状況によって変化する。状況による早期負重度の変化は主に、地面の特性（地面と足裏の接地部分の作用の仕方）と後述する擬速度が関係している。

4.2 w 軸方向の地面反力

4.2.1 w 軸正の方向の地面反力

ある 1 つの肢 i に加わる w 軸方向の地面反力を $F_{wi}(t)$ [N] とする。また、 $F_{wi-plus}(t)$ [N] を次のように定義する。

$$\begin{cases} F_{wi-plus}(t) = F_{wi}(t) & (F_{wi}(t) \geq 0) \\ F_{wi-plus}(t) = 0 & (F_{wi}(t) < 0) \end{cases}$$

1 完歩の時間 T [s] を用い、ある 1 完歩での $I_{w-plusT}$ [Ns] を次のように定義する。

$$I_{w-plusT} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_1+T} F_{wi-plus}(t) dt$$

理想の 1 完歩でのこれを、 $I_{uw-plusTu}$ とする。

4.2.2 w 軸負の方向の地面反力

ある 1 つの肢 i に加わる w 軸方向の地面反力 $F_{wi}(t)$ [N] を用い、 $F_{wi-minus}(t)$ [N] を次のように定義する。

$$\begin{cases} F_{wi-minus}(t) = 0 & (F_{wi}(t) > 0) \\ F_{wi-minus}(t) = F_{wi}(t) & (F_{wi}(t) \leq 0) \end{cases}$$

1 完歩の時間 T [s] を用い、ある 1 完歩での $I_{w-minusT}$ [Ns] を次のように定義する。 $I_{w-minusT} \leq 0$ となる。

$$I_{w-minusT} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_1+T} F_{wi-minus}(t) dt$$

理想の 1 完歩でのこれを、 $I_{uw-minusTu}$ とする。 $I_{uw-minusTu}$ を NT_u で割ると、 $\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ になる。この値は後述する擬速度によって変化する。正の値の方が扱いやすいため、マイナスを付けることがある。 $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u} \geq 0$ となる。

4.3 擬速度の導入

s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ は、状況によって変化する。それは主に、身体重心から見た地面と肢の速度の変化および地面の特性の変化による、地面への力の加えやすさの変化が原因と考えられる。それらを考慮した、擬速度 d [] という量を導入すると、 s_{ui} と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ のおおよその変化の仕方が簡潔にわかるようになる。 d は大きいほど、 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial d} s_{ui} &< 0 \quad (i = 1, \dots, n) \\ \frac{\partial}{\partial d} \left(-\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u} \right) &< 0\end{aligned}$$

擬速度 d を考えるときは、 $F_{pw} > 0$ のときに限る。

4.4 擬速度の計算

4.4.1 $\theta = 0$ 、 $F_{pw} = F_{px} = -F_{r1x}$ のときの擬速度

地面から見た理想の 1 完歩での能動的な平均加速度がない最も基本的な状況である。このとき d に関して次のことが成り立つ。

$$dN = NA - F_{pw}$$

$F_{pw} = F_{px} = -F_{r1x} = NA$ のとき、 $d = 0$ になる。

4.4.2 $\theta = 0$ 、 $F_{pw} = F_{px} \neq -F_{r1x}$ のときの擬速度

進行方向と F_{pw} の向きが同じで、地面から見た理想の 1 完歩での向心力方向の能動的な平均加速度はないが、進行方向の能動的な平均加速度がある状況である。このときの d は、擬速度補正数 C [] という量を用いて次のように表せる。 $C > 1$ である。

$$d_1 N = NA - (-F_{r1x})$$

$$d_2 N = NA - F_{pw}$$

とすると、

$$\begin{aligned} dN &= d_2 N + C(d_1 N - d_2 N) \\ d &= d_2 + C(d_1 - d_2) \\ dN &= NA - F_{pw} + C(F_{pw} + F_{r1x}) \end{aligned}$$

これは $F_{pw} = F_{px} = -F_{r1x}$ のときも成り立つ。

4.4.3 $\theta \neq 0$ のときの擬速度

進行方向と F_{pw} の向きが異なる状況である。このとき擬速度 d に関して次のことが成り立つ。ただし、 $F_{r1w} = F_{r1x} \cos \theta$ とする。

$$\begin{aligned} d_1 N &= NA - (-F_{r1w}) \\ d_2 N &= NA - F_{pw} \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned} dN &= d_2 N + C(d_1 N - d_2 N) \\ d &= d_2 + C(d_1 - d_2) \\ dN &= NA - F_{pw} + C(F_{pw} + F_{r1w}) \end{aligned}$$

これは $\theta = 0$ のときも成り立つ一般化された式となっている。

4.4.4 擬速度が満たしてほしいこと

擬速度 d を求める式は、次の満たしてほしいことから導いた。

- $F_{pw} = F_{px} = -F_{r1x}$ の場合、 $\frac{F_{pw}}{N}$ が一定であれば、 A が大きいほど d が大きくなる。
- $F_{pw} = F_{px} = -F_{r1x}$ の場合、 A が一定であれば、 $\frac{F_{pw}}{N}$ が小さいほど d が大きくなる。
- $F_{pw} = F_{px} = -F_{r1x} = NA$ の場合、 A の大きさに関わらず、 d は一定になる。

- $d_1 = d_2$ のとき、 $d = d_1 = d_2$ となる。
- $d_1 > d_2$ のとき、 $d > d_1 > d_2$ となる。
- $d_1 < d_2$ のとき、 $d < d_1 < d_2$ となる。
- 擬速度の原理から考えて、 $d = [\text{肢の絶対擬速度}] - [\text{地面の擬速度}]$ という構造をしている。
- $-\frac{F_{r1w}}{N}$ が大きいほど、地面の擬速度が大きくなる。

4.4.5 絶対擬速度と地面の擬速度

d に関する式は次のように変形できる。

$$d = d_2 + C(A - d_2) - C(A - d_1)$$

この式において、 $d_2 + C(A - d_2)$ の部分が（肢の）絶対擬速度、 $C(A - d_1)$ の部分が地面の擬速度である。絶対擬速度は $A + (C - 1)\frac{F_{pw}}{N}$ 、地面の擬速度は $-C\frac{F_{r1w}}{N}$ となる。

4.4.6 地面の変化による擬速度補正数の変化

擬速度補正数 C は地面の特性（地面と足裏の接地部分の作用の仕方）によって変化する。基本的に速く走れる地面ほど C は大きくなり、速く走れない地面ほど C は小さくなる。競馬の芝のレースでは基本的に、水分の少ない軽いと言われる馬場ほど C は大きくなり、水分を多く含んだ重いと言われる馬場ほど C は小さくなる。（厳密には地面だけでなく蹄鉄にも左右される。）

4.5 w 軸方向の地面反力の変化

4.5.1 w 軸負の方向の地面反力の変化

d は大きいほど、 $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。これについて、具体的にどのような関係式となっているかはわからない。ただし、最低限次のことは成り立つ。

$$\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u} \leq \frac{F_{pw}}{N} + \frac{F_{r1w}}{N}$$

4.5.2 w 軸正の方向の地面反力の変化

$I_{uw-plusTu}$ 、 $I_{uw-minusTu}$ 、 F_{pw} 、 F_{r1w} に関して次のことが成り立つため、 $I_{uw-plusTu}$ は、 $I_{uw-minusTu}$ 、 F_{pw} 、 F_{r1w} から導ける。

$$\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u} + \frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u} = \frac{F_{pw}}{N} + \frac{F_{r1w}}{N}$$

$$I_{uw-plusTu} + I_{uw-minusTu} = F_{pw}T_u + F_{r1w}T_u$$

4.5.3 正の方向の地面反力の割合

(w 軸に関する) 正の方向の地面反力の割合 P_u を次のように定義する。

$$\begin{aligned} P_u &= \frac{|I_{uw-plusTu}|}{|I_{uw-plusTu}| + |I_{uw-minusTu}|} \\ &= \frac{I_{uw-plusTu}}{I_{uw-plusTu} - I_{uw-minusTu}} \end{aligned}$$

4.6 後肢負重率の変化

4.6.1 後肢負重率

馬などの四足歩行の動物において、前肢に加わる地面反力を $\mathbf{F}_{fore}(t)$ [N]、後肢に加わる地面反力を $\mathbf{F}_{hind}(t)$ [N] とする。1 完歩の

時間 T [s] を用い、ある 1 完歩での後肢負重率 H を次のように定義する。

$$H = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} |\mathbf{F}_{hind}(t)| dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} (|\mathbf{F}_{fore}(t)| + |\mathbf{F}_{hind}(t)|) dt}$$

理想の 1 完歩での後肢負重率を H_u とする。

4.6.2 後肢負重率と正の方向の地面反力の割合との関係

$P_u = 0.5$ のときの理想の 1 完歩での後肢負重率を H_{u0} とする。これが基本の後肢負重率になり、理想の 1 完歩での後肢負重率の変化量を $\Delta H_u = H_u - H_{u0}$ とする。 P_u が大きいほど、 H_u は大きくなる。 $P_u > 0.5$ のとき、 $\Delta H_u > 0$ となり、 $P_u < 0.5$ のとき、 $\Delta H_u < 0$ となる。

正確には、 P_u が決まれば最も効率良く走行できる H_u が個体ごとに決まり、 P_u が大きいほど最も効率よく走行できる H_u が大きくなる、ということである。 $P_u = 0.5$ のときの最も効率良く走行できる後肢負重率が H_{u0} である。馬などの四足歩行の哺乳類は基本的に、実際の H_u が最も効率良く走行できる H_u に近くなるように、体を制御しながら走行すると考えられる。

5 特殊な平均の力モデルと擬速度モデルから導ける予想

特殊な平均の力モデルと擬速度モデルから導けることの一例として、様々な条件での地面反力の特徴と、疲労しにくくなる効果のあるドーピングをしているかどうかを走りのみから検知する方法が挙げられる。

5.1 様々な条件での地面反力の特徴

5.1.1 一定の速度で走る場合

1) ある個体が水平な地面を進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ で真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化と空気抵抗が無視できる大きさだとすると、速度 v_{ux} が小さい場合と比べて、速度 v_{ux} が大きい場合は、

- 出力数 b 、 F_{pz} 、 v_{ux} 、 F_{r1z} が大きくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が小さくなる。
- 擬速度 d が小さくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が大きくなる。
- $\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u}$ が大きくなる。正の方向の地面反力の割合 P_u は変わらず、後肢負重率 H_u は変わらない。

2) 走能力数 A の以外は同じ個体が水平な地面を進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、一定の出力数 b ($b \neq B$) で真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化と空気抵抗が無視できる大きさだとすると、走能力数 A が小さい個体と比べて、走能力数 A が大きい個体は、

- F_{pz} 、 v_{ux} 、 F_{r1z} が大きくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が小さくなる。
- 擬速度 d が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。
- $\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。正の方向の地面反力の割合 P_u は変わらず、後肢負重率 H_u は変わらない。

3) 走能力数 A の以外は同じ個体が水平な地面を進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、最大出力数 B で真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化と空気抵抗が無視できる大きさだとすると、走能力数 A が小さい個体と比べて、走能力数 A が大きい個体は、

- F_{pz} 、 v_{ux} 、 F_{r1z} が大きくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が小さくなる。
- 擬速度 d は変わらず、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ は変わらない。
- $\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u}$ は変わらない。正の方向の地面反力の割合 P_u は変わらず、後肢負重率 H_u は変わらない。

4) 走能力数 A の以外は同じ個体が水平な地面を進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、一定の速度で真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化が無視できる大きさだとすると、走能力数 A が小さい個体と比べて、走能力数 A が大きい個体は、

- 出力数 b 、 F_{pz} が小さくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が大きくなる。
- 擬速度 d が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。
- $\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。正の方向の地面反力の割合 P_u は変わらず、後肢負重率 H_u は変わらない。

5.1.2 加速して走る場合

1) ある個体が同じ速度から、進行方向の加速度 $a_{ux} > 0$ で水平な地面を真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化が無視できる大きさだとすると、 a_{ux} が小さい場合と比べて、 a_{ux} が大きい場合は、

- 出力数 b 、 F_{pz} が大きくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が小さくなる。
- 擬速度 d が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。
- $\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u}$ が大きくなる。正の方向の地面反力の割合 P_u が大きくなり、後肢負重率 H_u が大きくなる。

2) 走能力数 A の以外は同じ個体が、同じ速度から、一定の出力数 b 、進行方向の加速度 $a_{ux} > 0$ で水平な地面を真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化が無視できる大きさだとすると、走能力数 A が小さい個体と比べて、走能力数 A が大きい個体は、

- a_{ux} 、 F_{pz} が大きくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が小さくなる。
- 擬速度 d が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。
- $\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u}$ が大きくなる。正の方向の地面反力の割合 P_u が大きくなり、後肢負重率 H_u が大きくなる。

3) 走能力数 A の以外は同じ個体が、同じ速度から、一定の進行方向の加速度 $a_{ux} > 0$ で水平な地面を真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化が無視できる大きさだとすると、走能力数 A が小さい個体と比べて、走能力数 A が大きい個体は、

- 出力数 b 、 F_{pz} が小さくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が大きくなる。
- 擬速度 d が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。
- $\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。正の方向の地面反力の割合 P_u が大きくなり、後肢負重率 H_u が大きくなる。

5.1.3 減速して走る場合

1) ある個体が同じ速度から、進行方向の加速度 $a_{ux} < 0$ で水平な地面を真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化が無視できる大きさだとすると、 a_{ux} が大きく減速が小さい場合と比べて、 a_{ux} が小さく減速が大きい場合は、

- 出力数 b 、 F_{pz} が小さくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が大きくなる。

- 擬速度 d が小さくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が大きくなる。

2) 走能力数 A の以外は同じ個体が、同じ速度から、一定の進行方向の加速度 $a_{ux} < 0$ で水平な地面を真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化が無視できる大きさだとすると、走能力数 A が小さい個体と比べて、走能力数 A が大きい個体は、

- 出力数 b 、 F_{pz} が小さくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が大きくなる。
- 擬速度 d が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。
- $\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。正の方向の地面反力の割合 P_u が小さくなり、後肢負重率 H_u が小さくなる。

5.1.4 上り坂を走る場合

1) ある個体が進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、一定の出力数 b で真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化と空気抵抗が無視できる大きさで、 F_{r1z} が N に比例して大きくなるとすると、水平な地面を走る場合と比べて、一定の傾斜角の上り坂を走る場合は、

- v_{ux} 、 $\frac{F_{r1z}}{N}$ が小さくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が大きくなる。
- 擬速度 d が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。
- 正の方向の地面反力の割合 P_u が大きくなり、後肢負重率 H_u が大きくなる。

2) ある個体が進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、一定の速度で真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化が無視できる大きさで、 F_{r1z} が N に比例して大きくなるとすると、水平な地面を走る場合と比べて、一定の傾斜角の上り坂を走る場合は、

- 出力数 b 、 $\frac{F_{pz}}{N}$ が大きくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が小さくなる。
- 擬速度 d が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。
- 正の方向の地面反力の割合 P_u が大きくなり、後肢負重率 H_u が大きくなる。

5.1.5 下り坂を走る場合

1) ある個体が進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、一定の出力数 b で真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化と空気抵抗が無視できる大きさで、 F_{r1z} が N に比例して大きくなるとすると、水平な地面を走る場合と比べて、一定の傾斜角の下り坂を走る場合は、

- v_{ux} 、 $\frac{F_{r1z}}{N}$ が大きくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が小さくなる。
- 擬速度 d が小さくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が大きくなる。
- 正の方向の地面反力の割合 P_u が小さくなり、後肢負重率 H_u が小さくなる。

2) ある個体が進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、一定の速度で真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化が無視できる大きさで、 F_{r1z} が N に比例して大きくなるとすると、水平な地面を走る場合と比べて、一定の傾斜角の下り坂を走る場合は、

- 出力数 b 、 $\frac{F_{pz}}{N}$ が小さくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が大きくなる。
- 擬速度 d が小さくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が大きくなる。
- 正の方向の地面反力の割合 P_u が小さくなり、後肢負重率 H_u が小さくなる。

5.1.6 コーナーを走る場合

1) ある個体が水平な地面を進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、一定の出力数 b で走るとき、走能力数 A の変化と空気抵抗が無視できる大きさだとすると、直線を走る場合と比べて、コーナーを走る場合は、

- v_{ux} 、 F_{r1z} が小さくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が大きくなる。
- 擬速度 d が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。
- 正の方向の地面反力の割合 P_u が大きくなり、後肢負重率 H_u が大きくなる。

2) ある個体が水平な地面を進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、一定の速度で走るとき、走能力数 A の変化が無視できる大きさだとすると、直線を走る場合と比べて、コーナーを走る場合は、

- 出力数 b 、 F_{pz} が大きくなり、立脚期の割合 $\frac{T_{uon}^-}{T_u}$ が小さくなる。
- 擬速度 d が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) と $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。
- 正の方向の地面反力の割合 P_u が大きくなり、後肢負重率 H_u が大きくなる。

5.1.7 速く走れる地面の場合と速く走れない地面の場合

1) ある個体が進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、最大出力数 B で一定の傾斜角の上り坂を真っすぐ走るとき、走能力数 A の変化と空気抵抗が無視できる大きさだとすると、地面と擬速度補正数 C が変化しても、 d_1 と d_2 が一定で $d_1 > d_2$ となる。このとき、擬速度補正数 C の小さい速く走れない地面の場合と比べて、擬速度補正数 C の大きい速く走れる地面の場合は、

- 擬速度 d が大きくなり、 $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。

- 各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) が小さくなる。(地面が変化しても擬速度が同じであれば、各肢の早期負重度に差がないとした場合。)
- $\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u}$ が小さくなる。正の方向の地面反力の割合 P_u が大きくなり、後肢負重率 H_u が大きくなる。

2) ある個体が進行方向の加速度 $a_{ux} = 0$ 、最大出力数 B で一定の傾斜角の下り坂を真っすぐ走るととき、走能力数 A の変化と空気抵抗が無視できる大きさだとすると、地面と擬速度補正数 C が変化しても、 d_1 と d_2 が一定で $d_1 < d_2$ となる。このとき、擬速度補正数 C の小さい速く走れない地面の場合と比べて、擬速度補正数 C の大きい速く走れる地面の場合は、

- 擬速度 d が小さくなり、 $-\frac{I_{uw-minusTu}}{NT_u}$ が大きくなる。
- 各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) が大きくなる。(地面が変化しても擬速度が同じであれば、各肢の早期負重度に差がないとした場合。)
- $\frac{I_{uw-plusTu}}{NT_u}$ が大きくなる。正の方向の地面反力の割合 P_u が大きくなり、後肢負重率 H_u が大きくなる。

5.2 早期負重度からドーピングを検知する方法

特殊な平均の力モデルと擬速度モデルから導ける、疲労しにくくなる効果のあるドーピングをしているかどうかの見分け方はいくつか考えられる。その中で最も簡単と思われるものが、スパート中の各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) の変化の仕方から見分ける方法である。この方法について、おおよそどのような原理になっているのか、単純な条件とモデルを用いて説明する。わかっていないことが多い、厳密には正しくない仮定を多用する点は注意が必要であるが、おおよそどのようなことが行われているか示すことを目的としている。

5.2.1 条件設定

まず単純化するために、地面は水平で変化せず、地面から受ける基本の力以外の受動的な力は働くない状況で、ある個体が真っすぐ走っている場面を想定する。このとき、次が成り立つ。

$$F_{pw} = F_{px}$$

$$F_{rx} = F_{r1x}$$

$$F_{py} = F_{ry} = 0$$

スパートを出力数が最大出力数 B となること、スパート中を出力数が最大出力数 B となっている時間のこととする。実際には出力数が厳密に最大になることはないと思われるが、ここでは単純化するためこのような定義とする。今回の条件でのスパート中は、次が成り立つ。

$$F_{pw} = F_{px} = NAh(B) = NA$$

スパート開始時に $a_{ux} > 0$ となる状況を想定する。実際のレースでも、ほとんどの場合でスパート開始時は $a_{ux} > 0$ となる。

スパート中は疲労するため走能力数 A は減少する。疲労以外では A は変化しないものとして、スパート中の A が次のようになると仮定する。

$$A(t) = \delta t + A_0$$

$\delta [s^{-1}]$ はスパート中であれば一定になると想定する。 $\delta \leq 0$ である。 t はスパート中の時刻であり、 A_0 は $t = 0$ のときの A である。 δ が小さい値であるほど疲労しやすいことを意味する。疲労しにくくなる効果のあるドーピングをしている個体とそうでない個体では、この δ に差があらわれ、ドーピングをしていると δ が極端に大きくなる (0 に近くなる)。

$-F_{r1x}$ を v_{ux} と N に比例するものと仮定して、次のように置く。

$$-F_{r1x} = \varepsilon N v_{ux}$$

$\varepsilon [s m^{-1}]$ は正の定数である。 $\varepsilon > 0$ 。

各肢の早期負重量 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) の変化は、擬速度 d の変化のみに依存すると仮定する。

5.2.2 計算

d の変化がわかれば、 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) の変化もわかることになる。ここで、スパート中の d の変化について考える。スパート中は常に $d_2 = 0$ となる ($d_2 N = NA - NA = 0$)。また、

$$\begin{aligned} d_1(t)N &= NA(t) + F_{r1x}(t) \\ &= F_{px}(t) + F_{rx}(t) \\ &= ma_{ux}(t) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} d(t)N &= d_2 N + C(d_1(t)N - d_2 N) \\ &= Cd_1(t)N \\ &= Cma_{ux}(t) \\ d(t) &= \frac{Cm}{N}a_{ux}(t) \end{aligned}$$

となり、 $a_{ux}(t)$ が求まれば、 $d(t)$ が求まることがわかる。ここから $a_{ux}(t)$ を求める。 $A(t) = \delta t + A_0$ 、 $-F_{r1x} = \varepsilon N v_{ux}$ の関係を用いると、

$$\begin{aligned} a_{ux}(t) &= \frac{F_{px}(t) + F_{r1x}(t)}{m} \\ &= \frac{NA(t) + F_{r1x}(t)}{m} \\ &= \frac{N(\delta t + A_0) - \varepsilon N v_{ux}(t)}{m} \end{aligned}$$

となり、次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt}v_{ux}(t) = -\frac{\varepsilon N}{m}v_{ux}(t) + \frac{\delta N}{m}t + \frac{NA_0}{m}$$

これを解くと、

$$v_{ux}(t) = (v_{ux0} - \frac{A_0}{\varepsilon} + \frac{\delta m}{\varepsilon^2 N})e^{-\frac{\varepsilon N}{m}t} + \frac{\delta}{\varepsilon}t + \frac{A_0}{\varepsilon} - \frac{\delta m}{\varepsilon^2 N}$$

となる。 v_{ux0} は $t = 0$ のときの v_{ux} である。 $a_{ux}(t)$ は、 $v_{ux}(t)$ を時間微分したものであるから、

$$\begin{aligned} a_{ux}(t) &= -\frac{\varepsilon N}{m}(v_{ux0} - \frac{A_0}{\varepsilon} + \frac{\delta m}{\varepsilon^2 N})e^{-\frac{\varepsilon N}{m}t} + \frac{\delta}{\varepsilon} \\ &= \frac{NA_0 - \varepsilon N v_{ux0}}{m} e^{-\frac{\varepsilon N}{m}t} - \frac{\delta}{\varepsilon}(e^{-\frac{\varepsilon N}{m}t} - 1) \\ &= \frac{NA_0 + F_{r1x0}}{m} e^{-\frac{\varepsilon N}{m}t} - \frac{\delta}{\varepsilon}(e^{-\frac{\varepsilon N}{m}t} - 1) \\ &= a_{ux0}e^{-\frac{\varepsilon N}{m}t} - \frac{\delta}{\varepsilon}(e^{-\frac{\varepsilon N}{m}t} - 1) \end{aligned}$$

となる。 F_{r1x0} は $t = 0$ のときの F_{r1x} 、 a_{ux0} は $t = 0$ のときの a_{ux} である。そして、 $d(t)$ は次のようになる。

$$d(t) = \frac{Cm}{N}a_{ux}(t) = \frac{Cm}{N}(a_{ux0}e^{-\frac{\varepsilon N}{m}t} - \frac{\delta}{\varepsilon}(e^{-\frac{\varepsilon N}{m}t} - 1))$$

地面は水平で、重力以外に N に影響を与える力は働くない状況のため、重力加速度を g [m s⁻²] すると、 $N = mg$ が成り立つ。 $d(t)$ を g を用いて表すと、

$$d(t) = \frac{C}{g}a_{ux}(t) = \frac{C}{g}(a_{ux0}e^{-\varepsilon gt} - \frac{\delta}{\varepsilon}(e^{-\varepsilon gt} - 1))$$

となる。この式から、 d 、 a_{ux} は t 、 a_{ux0} 、 δ によって決まり、 a_{ux0} が同じであれば、 δ が大きい（0 に近い）ほど、ある t ($t > 0$) における d 、 a_{ux} が大きくなることがわかる（Fig. 9、Fig. 10）。また、 d が大きいほど、 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) は小さくなる。疲労しにくくなる効果のあるドーピングをしていて δ が極端に大きい（0 に近い）場合、 a_{ux0} が同じであれば、ある t ($t > 0$) において、 d 、 a_{ux} が極端に大きくなり、 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) が極端に小さくなる。

d の時間微分についても考える。

$$\frac{d}{dt}d(t) = \frac{C}{g}\frac{d}{dt}a_{ux}(t) = -C(\varepsilon a_{ux0} - \delta)e^{-\varepsilon gt}$$

となる。 $t = 0$ のときは、

$$\frac{d}{dt}d = \frac{C}{g}\frac{d}{dt}a_{ux} = -C(\varepsilon a_{ux0} - \delta)$$

となる。スパート中であれば、どこでも $t = 0$ として考えることができる。つまり、 d の時間微分 $\frac{d}{dt}d$ と地面から見た理想の 1 完歩での平均加速度の時間微分 $\frac{d}{dt}a_{ux}$ は、その時点の地面から見た理想の 1 完歩での平均加速度 a_{ux} と δ によって決まり、

$$\frac{d}{dt}d = \frac{C}{g} \frac{d}{dt}a_{ux} = -C(\varepsilon a_{ux} - \delta)$$

と表せる。 δ が大きい（0 に近い）ほど、 a_{ux} に対応する $\frac{d}{dt}d$ 、 $\frac{d}{dt}a_{ux}$ が大きくなる（0 に近くなる）ことがわかる（Fig. 11、Fig. 12）。また、 $\frac{d}{dt}d$ が大きい（0 に近い）ほど、 $\frac{d}{dt}s_{ui}$ ($i = 1, \dots, n$) は小さくなる（0 に近くなる）。疲労しにくくなる効果のあるドーピングをしていて δ が極端に大きい（0 に近い）場合、 a_{ux} に対応する $\frac{d}{dt}d$ 、 $\frac{d}{dt}a_{ux}$ が極端に大きくなり（0 に近くなり）、 a_{ux} に対応する $\frac{d}{dt}s_{ui}$ ($i = 1, \dots, n$) が極端に小さくなる（0 に近くなる）。

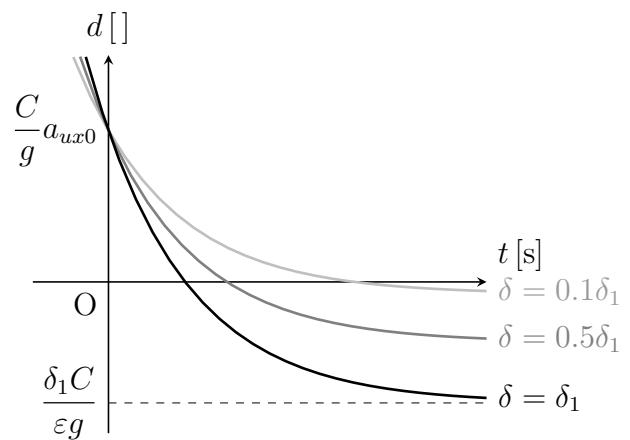


Fig. 9

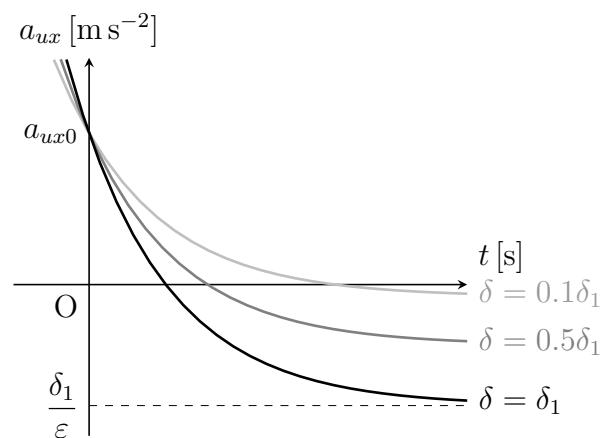


Fig. 10

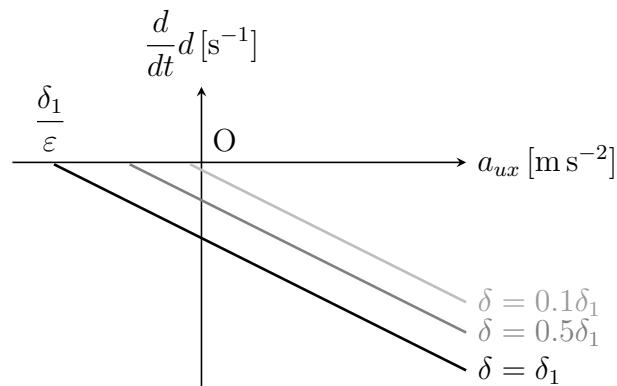


Fig. 11

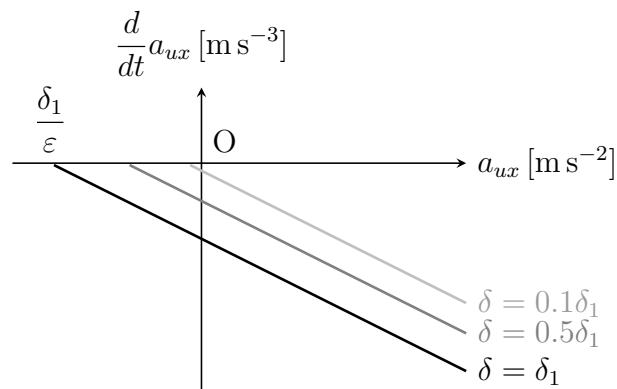


Fig. 12

5.2.3 結論

厳密には正しくない仮定を用いたため、計算式がどこまで正確かはわからない。しかし、特殊な平均の力モデルと擬速度モデルの原理から、基本的に次のことは成り立つと思われる。疲労にくくなる効果のあるドーピングの有無以外は同じ状態の人や馬が、同じ初期条件 ($t = 0$) で全力近くを出すスパートをしたとき、ドーピングをしている方が、ある t ($t > 0$)において、擬速度 d と地面から見た理想の 1 完歩での平均加速度 a_{ux} が大きくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) が小さくなる。またそのスパート中であれば、ドーピングをしている方が、地面から見た理想の

1完歩での平均加速度 a_{ux} に対応する、擬速度の時間微分 $\frac{d}{dt}d$ と地面から見た理想の1完歩での平均加速度の時間微分 $\frac{d}{dt}a_{ux}$ が大きくなり（0に近くなり）、地面から見た理想の1完歩での平均加速度 a_{ux} に対応する、各肢の早期負重度の時間微分 $\frac{d}{dt}s_{ui}$ ($i = 1, \dots, n$) が小さくなる（0に近くなる）。簡単に言うと、全力近くを出すスパート中は疲労しにくくなる効果のあるドーピングをしていると、擬速度 d と地面から見た理想の1完歩での平均加速度 a_{ux} が減少しにくくなり、各肢の早期負重度 s_{ui} ($i = 1, \dots, n$) が増加しにくくなる、ということである。

6 おわりに

本論文では、まず様々な条件下での立脚期の割合を導くことができる特殊な平均の力モデルと、様々な条件下での早期負重度、 w 軸方向の地面反力、後肢負重率を導くことができる擬速度モデルの提案を行った。また、理想の1完歩や滑走時垂直抗力など、走行の解析に必要な概念の提案も行った。応用として、特殊な平均の力モデルと擬速度モデルから「疲労しにくくなる効果のあるドーピングをした人や馬はそうでない個体に比べ、全力近くを出すスパート中の各肢の早期負重度が増加しにくくなる」という予想を導いた。将来的にこのことを用いて、走りのみからドーピングを検知する方法が確立できれば、ドーピング検査の精度を高めることができると考えている。

課題としては、定量的なデータから構築していないことが挙げられる。特殊な平均の力モデルと擬速度モデルは、主に動画で人やサラブレッドの走りを観察し、そこから得られた情報を基に構築したモデルである。今後は定量的なデータ収集を行い、モデル内の式や値の決定および修正を行う必要があると考えている。また、基本的に人や馬のすべての肢で、着地直後に皮膚、蹄、シューズ、ソックス、地面の変形やそれぞれの間の滑りがあると考えられる。早期負重度に関しては、このような着地直後の変形や滑りを考慮して、本論文で定義したような着地したときの時刻

ではなく、着地後に変形や滑りが十分に小さくなった時刻を用いて定義した方が、好ましい可能性がある。そして、発揮する筋力が小さく出力数が小さい場合は、今回提案したモデル、つまり「走行」のモデルが適用できない可能性がある。人では歩行と走行およびその切り替わり、馬では常歩、速歩、駆歩、襲歩、およびその切り替わり、これらをモデルに組み込めていない点も課題である。